# 高维空间上连续分片线性函数的绝对值表示*

李星野 王书宁 王万宾

清华大学自动化系，北京 100084

**摘要** 高维空间上连续分片线性函数的绝对值表示是一个一直没有能很好解决的问题．在一维空间上连续分片线性函数的绝对值表示基础之上，采用递推的方法，给出了高维空间上连续分片线性函数的绝对值表示；同时证明了该绝对值表示对所有高维空间上连续分片线性函数有效．

**关键词** 分片线性函数 绝对值表示 高维空间 递推方法

分片线性模型得不到广泛和系统应用的主要原因是传统的分片线性函数表示式涉及太多的参数，包括定义域的定义以及定义域每一部分上函数的定义，冗余是显然的；如果再加上连续性条件，冗余更大．

紧凑表示这一思想的提出从概念上解决了这个问题．现有的紧凑表示基本上局限于对连续分片线性函数的表示，表示形式主要有绝对值型、极大极小型和状态方程型．本文主要讨论高维空间上连续分片线性函数的嵌套绝对值型表示．

第1个绝对值模型是 Kang 和 Chua 于 1978 年提出的[1]，可以表示所有的单变量连续分段线性函数，但只能表示一部分多变量连续分片线性函数，即满足一致变差性的连续分片线性函数．第2个模型是 Kahlert 和 Chua 于 1990 年对第1个模型的改进[2]，可以表示二维空间上的所有连续分片线性函数，但它表示三维空间上连续分片线性函数的能力很有限．第4个模型是 Lin 和 Unbehauen 于 1994 年对第2个模型的进一步改进[3]，从理论上讲它能表示所有的连续分片线性函数．第3个模型是 Guzelis 和 Goknar 于 1991 年提出的[4]，它类似于第2个模型．此外，Breiman 于 1993 年还提出了链接超平面模型[5]；它本质上等同于上述第1个模型．

尽管第1个模型相对简单，但是它可以以任意精度逼近任意非线性函数[6]．因此其他分片线性模型的逼近能力就更不成问题了．然而，上述分片线性模型的逼近能力和表示能力主要是理论上的结果．至今还没有人针对高维空间上连续分片线性函数的紧凑表示给出构造性的结果．本文构造性地给出了 $n$ 维空间上连续分片线性函数的嵌套绝对值模型、并证明了这个模型可以表示 $n$ 维空间上的所有连续分片线性函数．

## 1 $n$ 维空间上连续分片线性函数的绝对值表示

首先我们回忆一下 Kang 和 Chua 提出的绝对值模型[1]，它以如下形式给出

$$f(x)=\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\beta+\sum_{i}(-1)^{\sigma_i}\left|\alpha_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\beta_i\right|. \quad (1)$$

其中 $\alpha$，$\alpha_i$，$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，$\beta$，$\beta_i\in\mathbb{R}$，$\sigma_i=0$，1，$\mathbb{R}^n$ 是 $n$ 维实空间，$\mathbb{R}$ 是一维实空间．此处的 $\sum_i(-1)^{\sigma_i}\cdot\left|\alpha_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\beta_i\right|$ 表示若干项 $(-1)^{\sigma_i}\left|\alpha_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\beta_i\right|$ 的和，$(-1)^{\sigma_i}$表示 $(-1)^{\sigma_i}\left|\alpha_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\beta_i\right|$ 可能是正的、也可能是负的．事实上，(1)式是若干链接超平面与一个平面的叠加[5]．

记 $g^0(x)=\xi^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\zeta$，

$$g^1(x)=g_1^0(x)+g_2^0(x)+(-1)^{\sigma}\left|g_2^0(x)\right|,$$

$$\sigma=0,1,$$

2001-05-18 收稿，2001-05-21 收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目(批准号：69974023 和 69934010)

E-mail：lxg@mail.au.tsinghua.edu.cn

$$g^n(\boldsymbol{x}) = g^0(\boldsymbol{x}) + g^{n-1}(\boldsymbol{x}) + (-1)^\sigma \left| g^{n-1}(\boldsymbol{x}) \right|,$$
$$n > 1,\ \sigma = 0,1.$$

这是一个迭代定义，$g_i^j(\boldsymbol{x})$的上标表示函数所在的函数类，$g_i^j(\boldsymbol{x})$的下标表示函数类中的某个函数．显然，$g^0(\boldsymbol{x})$是一个超平面，$g^1(\boldsymbol{x})$是一个链接超平面[5]．然而 $g^k(\boldsymbol{x})$ $(k>1)$的几何意义就不十分明显了．

此时(1)式可以表示为

$$f^1(\boldsymbol{x}) = g^0(\boldsymbol{x}) + \sum_i g_i^1(\boldsymbol{x}). \qquad (2)$$

应该注意到 $g^k(\boldsymbol{x})$的表达式中将出现 $k$ 层绝对值嵌套现象．

**定义** 设 $n$ 维空间上的连续分片线性函数由以下 $m$ 个超平面构成

$$\begin{cases} y = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1, \\ y = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2, \\ \cdots \\ y = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + b_m. \end{cases} \qquad (3)$$

其中 $m \geqslant 2$．若上述方程组有解，则称该连续分片线性函数为连续分片线性函数的基本结构，记为 $y = f^n(\boldsymbol{x})$．

很明显，连续分片线性函数的基本结构由 $m$ 个有公共交点的超平面构成．

$$记\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{m\times 1},$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

**引理1** 若 rank $(\boldsymbol{A}) = n$ 且 rank $(\boldsymbol{A}, -\boldsymbol{e}) = n+1$，则

$$y = f^n(\boldsymbol{x}) = g^1(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=2}^{n} \sum_j g_j^i(\boldsymbol{x}).$$

**证** 此时与(3)式对应的分片线性函数是由交于一点的 $m$ 个超平面构成的．

下面用数学归纳法证明：

当 $n=1$ 时，结论已被证明了[1]．假设直到 $n-1$时结论都成立．对于 $n$，固定 $x_1$，由归纳假设就有

$$g_{x_1}^0(x_2, x_3, \cdots, x_n) = [\alpha_2(x_1), \alpha_3(x_1), \cdots, \alpha_n(x_1)] \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} +$$

$$\beta(x_1) = [\alpha_2(x_1), \alpha_3(x_1), \cdots, \alpha_n(x_1)] \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} +$$

$$g^0(x_1) + \sum_l g_l^1(x_1) = [\alpha_2(x_1), \alpha_3(x_1), \cdots, \alpha_n(x_1)]$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \xi x_1 + \zeta + \sum_l (\varphi_l x_1 + \psi_l + (-1)^{\sigma_l} |\varphi_l x_1 + \psi_l|),$$

$\sigma_l = 0,1.$

因为函数是线性函数，所以必有

$$g_{x_1}^0(x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n) = [\xi,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \zeta +$$

$$\sum_l ([\varphi_l,\ 0,\ \cdots,\ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \psi_l +$$

$$(-1)^{\sigma_l} | [\varphi_l,\ 0,\ \cdots,\ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \psi_l | ).$$

因为此分片线性函数是由 $m$ 个交于一点的超平面构成的，因此所有的定义域分割面必有公共交点．

从而必有

$$\sum_l (-1)^{\sigma_l} | [\varphi_l,\ 0,\ \cdots,\ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \psi_l | =$$

$$\rho\left|[1,\ 0,\ \cdots,\ 0]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}+\tau\right|,\ \rho,\tau\in\mathbb{R};$$

否则就会出现平行的分割面，与“所有的定义域分割面必有公共交点”矛盾．进而就有

$$g_{x_1}^0(x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n)=g_1^0(\boldsymbol{x})+g_2^0(\boldsymbol{x})+$$
$$(-1)^\sigma\left|g_2^0(\boldsymbol{x})\right|=g^1(\boldsymbol{x}),\ \sigma=0,1;$$
$$g_{x_1}^{k+1}(x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n)=g_{x_1,1}^k(x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n)+$$
$$g_{x_1,2}^k(x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n)+(-1)^\sigma$$
$$|g_{x_1,2}^k(x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n)|=g_1^{k+1}(\boldsymbol{x})+g_2^{k+1}(\boldsymbol{x})$$
$$+(-1)^\sigma|g_2^{k+1}(\boldsymbol{x})|=g^{k+2}(\boldsymbol{x}),\ \sigma=0,1,$$

再由归纳假设就有

$$y=f^n(\boldsymbol{x})=f_{x_1}^n(x_2,x_3,\cdots,x_n)=g_{x_1}^0(x_2,x_3,\cdots,x_n)+$$
$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_j g_{x_1,j}^i(x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n)=$$
$$g^1(\boldsymbol{x})+\sum_{i=2}^{n}\sum_j g_j^i(\boldsymbol{x})=$$
$$g^0(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{n}\sum_j g_j^i(\boldsymbol{x}).$$

即引理结论成立．

**引理2**　若 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A},\ -\boldsymbol{e})=k$，则

$$y=f^n(\boldsymbol{x})=g^0(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{k-1}\sum_j g_j^i(\boldsymbol{x}).$$

**证**　仍用数学归纳法证明．当 $k=1$ 时，结论已被证明了[1]．假设直到 $k-1$ 时结论都成立．对于 $k$，不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 $k$ 行线性无关．

记 $$\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kn}\end{bmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{e}}=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}_{k\times1}.$$

下面分两种情况讨论：

**情况1**　若 $k=n$，则 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 是非奇异矩阵．记 $\tilde{\boldsymbol{p}}_1=\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{e}}$，$\|\tilde{\boldsymbol{p}}_1\|_2=\dfrac{1}{\delta}$，$\boldsymbol{p}_1=\tilde{\boldsymbol{p}}_1\delta$ 将 $\boldsymbol{p}_1$ 扩展为正交阵 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_n]$（只需取方程组 $\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$ 的 $n-1$ 个标准正交解作为 $\boldsymbol{p}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_n$）．

构造正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\zeta}$；其中 $\boldsymbol{\zeta}=\begin{bmatrix}\zeta_1\\\zeta_2\\\vdots\\\zeta_n\end{bmatrix}$．

则 $\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}=\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\zeta}=[\tilde{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{\delta},\ \boldsymbol{C}]\ \boldsymbol{\zeta}$；

其中 $$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}c_{12}&c_{13}&\cdots&c_{1n}\\c_{22}&c_{23}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\c_{n2}&c_{n3}&\cdots&c_{nn}\end{bmatrix}.$$

于是(3)式中 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 对应的 $n$ 个超平面就可以表示为

$$\begin{cases}y=\zeta_1\delta+c_{12}\zeta_2+\cdots+c_{1n}\zeta_n+b_1,\\y=\zeta_1\delta+c_{22}\zeta_2+\cdots+c_{2n}\zeta_n+b_2,\\\cdots\\y=\zeta_1\delta+c_{n2}\zeta_2+\cdots+c_{nn}\zeta_n+b_n.\end{cases}\tag{4}$$

由于 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A},\ -\boldsymbol{e})=k=n$，因此存在 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $[\boldsymbol{A},\ -\boldsymbol{e}]=\boldsymbol{Q}[\tilde{\boldsymbol{A}},\ -\tilde{\boldsymbol{e}}]$，亦即 $[\boldsymbol{A},\ -\boldsymbol{e}]$ 的各行可由 $[\tilde{\boldsymbol{A}},\ -\tilde{\boldsymbol{e}}]$ 的各行线性表示．

从而经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\zeta}$ 后，(3)式可表示为

$$\begin{cases}y=\zeta_1\delta+c_{12}\zeta_2+\cdots+c_{1n}\zeta_n+b_1,\\y=\zeta_1\delta+c_{22}\zeta_2+\cdots+c_{2n}\zeta_n+b_2,\\\cdots\\y=\zeta_1\delta+c_{m2}\zeta_2+\cdots+c_{mn}\zeta_n+b_m.\end{cases}\tag{5}$$

再做正交变换

$$\begin{bmatrix}y\\\zeta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}&\dfrac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}\\-\dfrac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}&\dfrac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\end{bmatrix}\cdot[y'\zeta_1'],$$

则(5)式可表示为

$$\begin{cases}y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}(c_{12}\zeta_2+\cdots+c_{1n}\zeta_n+b_1),\\y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}(c_{22}\zeta_2+\cdots+c_{2n}\zeta_n+b_2),\\y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}(c_{m2}\zeta_2+\cdots+c_{mn}\zeta_n+b_m).\end{cases}\tag{6}$$

由于所做的变换都是正交变换，所以(6)式和(3)式表示的是同一个分片线性函数.

于是(6)式表示的分片线性函数可以记为 $y' = h(\zeta_2, \zeta_3, \cdots, \zeta_n)$；由归纳假设就有

$$y' = h(\zeta_2, \zeta_3, \cdots, \zeta_n) = g^0(\zeta_2, \zeta_3, \cdots, \zeta_n) + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_j g_j^i(\zeta_2, \zeta_3, \cdots, \zeta_n).$$

从而

$$y = \zeta_1\delta + \sqrt{1+\delta^2}g^0(\zeta_2, \zeta_3, \cdots, \zeta_n) + \sqrt{1+\delta^2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_j g_j^i(\zeta_2, \zeta_3, \cdots, \zeta_n).$$

再取正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\zeta}$ 的逆变换 $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 就有

$$\begin{aligned} y = f^n(\boldsymbol{x}) = {} & \delta\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \sqrt{1+\delta^2}g^0(\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \cdots, \boldsymbol{p}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}) + \\ & \sqrt{1+\delta^2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_j g_j^i(\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \cdots, \boldsymbol{p}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}) = \\ & g^0(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_j g_j^i(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

**情况2** 若 $k < n$，则 $\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} = 0$ 有 $n-k$ 个线性无关解，因此也就有 $n-k$ 个标准正交解.

不妨设这 $n-k$ 个标准正交解为 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_{n-k}$；将 $[\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_{n-k}]$ 扩充为正交矩阵 $\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_{n-k}, \boldsymbol{p}_{n-k+1}, \cdots, \boldsymbol{p}_n]$（只需取方程组 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_{n-k}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{x} = 0$ 的 $k$ 个标准正交解作为 $\boldsymbol{p}_{n-k+1}, \cdots, \boldsymbol{p}_n$）.

构造正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\zeta}$；此时必有 $\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\zeta} = [\boldsymbol{O}, \boldsymbol{B}]\boldsymbol{\zeta}$.

其中 $\boldsymbol{O}$ 为 $k\times(n-k)$ 阶零矩阵，

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{1n-k+1} & b_{1n-k+2} & \cdots & b_{1n} \\ b_{2n-k+1} & b_{2n-k+2} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{kn-k+1} & b_{kn-k+2} & \cdots & b_{kn} \end{bmatrix}$$

是非奇异矩阵.

从而经正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\zeta}$ 后，$\tilde{\boldsymbol{A}}$ 对应的 $k$ 个超平面就可以表示为

$$\begin{cases} y = b_{1n-k+1}\zeta_{n-k+1} + b_{1n-k+2}\zeta_{n-k+2} + \cdots + b_{1n}\zeta_n + b_1, \\ y = b_{2n-k+1}\zeta_{n-k+1} + b_{2n-k+2}\zeta_{n-k+2} + \cdots + b_{2n}\zeta_n + b_2, \\ \cdots \\ y = b_{kn-k+1}\zeta_{n-k+1} + b_{kn-k+2}\zeta_{n-k+2} + \cdots + b_{kn}\zeta_n + b_k. \end{cases} \tag{7}$$

由于 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}, -\boldsymbol{e}) = k$，因此存在 $m\times k$ 阶矩阵 $\boldsymbol{U}$，使 $[\boldsymbol{A}, -\boldsymbol{e}] = \boldsymbol{U}[\tilde{\boldsymbol{A}}, -\tilde{\boldsymbol{e}}]$，亦即 $[\boldsymbol{A}, -\boldsymbol{e}]$ 的各行可由 $[\tilde{\boldsymbol{A}}, -\tilde{\boldsymbol{e}}]$ 的各行线性表示.

所以经正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\zeta}$ 后，(3)式可以表示为

$$\begin{cases} y = b_{1n-k+1}\zeta_{n-k+1} + b_{1n-k+2}\zeta_{n-k+2} + \cdots + b_{1n}\zeta_n + b_1, \\ y = b_{2n-k+1}\zeta_{n-k+1} + b_{2n-k+2}\zeta_{n-k+2} + \cdots + b_{2n}\zeta_n + b_2, \\ \cdots \\ y = b_{mn-k+1}\zeta_{n-k+1} + b_{mn-k+2}\zeta_{n-k+2} + \cdots + b_{mn}\zeta_n + b_m. \end{cases} \tag{8}$$

注意到 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{P} & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 为正交矩阵及 $[\boldsymbol{A}, -\boldsymbol{e}]\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{P} & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} = \boldsymbol{U}[\tilde{\boldsymbol{A}}, -\tilde{\boldsymbol{e}}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{P} & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} = \boldsymbol{U}[\boldsymbol{O}, \boldsymbol{B}, -\tilde{\boldsymbol{e}}] = [\boldsymbol{O}, \boldsymbol{UB}, -\boldsymbol{U}\tilde{\boldsymbol{e}}]$，必有 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{UB}, -\boldsymbol{U}\tilde{\boldsymbol{e}}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{U}[\tilde{\boldsymbol{A}}, -\tilde{\boldsymbol{e}}]) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}, -\boldsymbol{e}) = k$.

又注意到 $\boldsymbol{U}$ 的前 $k$ 行是一个单位矩阵（因为它是 $[\tilde{\boldsymbol{A}}, -\tilde{\boldsymbol{e}}]$ 各行表示自身各行的系数），必有 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{UB}) = k$.

从而(8)式就是情况1那种分片线性函数，由情况1的证明就有

$$\begin{aligned} y = f^n(\boldsymbol{x}) = {} & g^0(\zeta_{n-k+1}, \zeta_{n-k+2}, \cdots, \zeta_n) + \\ & \sum_{i=1}^{k-1}\sum_j g_j^i(\zeta_{n-k+1}, \zeta_{n-k+2}, \cdots, \zeta_n) = \\ & g^0(\boldsymbol{p}_{n-k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}_{n-k+2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \cdots, \boldsymbol{p}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}) + \\ & \sum_{i=1}^{k-1}\sum_j g_j^i(\boldsymbol{p}_{n-k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}_{n-k+2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \cdots, \boldsymbol{p}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

总之，引理结论成立.

**引理3** 若 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = k < n$ 且 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}, -\boldsymbol{e}) = k+1$，则

$$y = f^n(\boldsymbol{x}) = g^0(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{k}\sum_j g_j^i(\boldsymbol{x}).$$

**证** 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 $k$ 行线性无关.

根据引理 2 情况 2 的证明知存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{O},\ \boldsymbol{B}]$.

其中 $\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{O}$ 是 $k\times(n-k)$ 阶零矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是非奇异矩阵.

因为 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}(\tilde{\boldsymbol{A}})=k$，所以存在 $m\times k$ 阶矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{A}}$.

于是 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}[\boldsymbol{O},\ \boldsymbol{B}]=[\boldsymbol{O},\ \boldsymbol{QB}]$ 且经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P\zeta}$ 后(3)式能表示为

$$\begin{cases} y=b_{1n-k+1}\zeta_{n-k+1}+b_{1n-k+2}\zeta_{n-k+2}+\cdots+b_{1n}\zeta_n+b_1, \\ y=b_{2n-k+1}\zeta_{n-k+1}+b_{2n-k+2}\zeta_{n-k+2}+\cdots+b_{2n}\zeta_n+b_2, \\ \cdots \\ y=b_{mn-k+1}\zeta_{n-k+1}+b_{mn-k+2}\zeta_{n-k+2}+\cdots+b_{mn}\zeta_n+b_m. \end{cases} \tag{9}$$

因为 $[\boldsymbol{A},\ -\boldsymbol{e}]\begin{bmatrix} \boldsymbol{P} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=[\boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{A}},\ -\boldsymbol{e}]\begin{bmatrix} \boldsymbol{P} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=[\boldsymbol{O},\ \boldsymbol{QB},\ -\boldsymbol{e}]$，所以 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{O},\ \boldsymbol{QB},\ -\boldsymbol{e})=k+1$.

从而(9)式满足引理 1 的条件，进而

$$\begin{aligned} y=f^n(\boldsymbol{x}) &= g^0(\zeta_{n-k+1},\ \zeta_{n-k+2},\ \cdots,\ \zeta_n)+ \\ &\sum_{i=1}^{k}\sum_j g_j^i(\zeta_{n-k+1},\ \zeta_{n-k+2},\ \cdots,\ \zeta_n)= \\ &g^0(\boldsymbol{p}_{n-k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{p}_{n-k+2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})+ \\ &\sum_{i=1}^{k}\sum_j g_j^i(\boldsymbol{p}_{n-k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{p}_{n-k+2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

即引理结论成立.

显然，任意连续分片线性函数都是基本结构的叠加，因此有下述结论.

**定理** 任意 $n$ 维空间上的连续分片线性函数都可以表示为

$$y=\sum_i f_i^n(\boldsymbol{x})=g^0(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{k}\sum_j g_j^i(\boldsymbol{x}),\ k\leqslant n.$$

## 2 小结

本文采用递推的方式给出了 $n$ 维空间上连续分片线性函数的绝对值模型，同时证明了这一模型可以表示所有 $n$ 维空间上连续的分片线性函数. 这一结果比文献[3]的结果前进了一大步，是一个完整的定量结果. 在此基础上，我们可以将绝对值模型转换为 min max 模型，这将有利于构造线性规划逼近算法. 本文给出的表示方法在二维空间上优于文献 [2] 和 [4] 给出的相应方法，还可用于高维空间.

## 参 考 文 献

1 Kang S M, et al. A global representation of multidimensional piecewise linear functions with linear partitions. IEEE Trans, Circuits Syst, 1978, 25: 938

2 Kahlert C, et al. A generalized canonical piecewise linear representation. IEEE Trans, Circuits Syst, 1990, 37: 373

3 Lin J N, et al. A generalization of canonical piecewise-linear functions. IEEE Trans, Circuits Syst, 1994, 41: 345

4 Guzelis G, et al. A canonical representation for piecewise affine maps and its applications to circuit analysis. IEEE Trans, Circuits Syst, 1991, 38: 1342

5 Breiman L. Hinging hyperplanes for regression, classification and function approximation. IEEE Trans, Inf Theory, 1993, 39(3): 999

6 Lin J N, et al. Canonical piecewise-linear approximations. IEEE Trans, Circuits Syst, 1992, 39: 697